

Labor für Nachrichtentechnik an der Dualen  
Hochschule Baden Württemberg in  
Friedrichshafen

---

# Vergleich von Signalen in der Time Domain und der Frequency Domain

Autor:

**Gunthard Kraus, DG8GB**, Oberstudienrat i. R.  
Gastdozent an der Dualen Hochschule Baden Württemberg

Email: [mail@gunthard-kraus.de](mailto:mail@gunthard-kraus.de)

Homepage: [www.gunthard-kraus.de](http://www.gunthard-kraus.de)

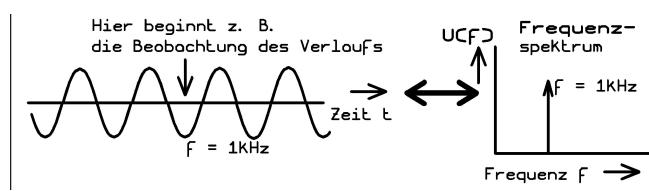
# Signalformen und Oberwellen

## 1. Grundlagen

Selbst viele Laien wissen sofort die Antwort auf die Frage: „Wie sieht die Spannung aus, die in jedem Haus aus der Steckdose kommt?“ Sie lautet immer: „Na klar, ein Sinus mit 230 Volt Effektivwert und einer Frequenz von 50 Hz“. Aber bei der nächsten Frage:

„Welche verschiedenen Frequenzen stecken eigentlich in diesem Steckdosensignal?“

kriegt man selbst von Fachleuten oft die falsche Antwort. Das liegt daran, dass man erstens genau die „Mess- und Beobachtungsbedingungen“ beachten muss, denn damit ändert sich direkt die Lösung. Zweitens muss man sozusagen die große Lupe nehmen und das Signal mit der Lupe absuchen (...wie einen Hund nach Flöhen..) und auf jede Kleinigkeit oder Unregelmäßigkeit achten, denn die sind enorm wichtig.....Formulieren wir es mal ganz korrekt:

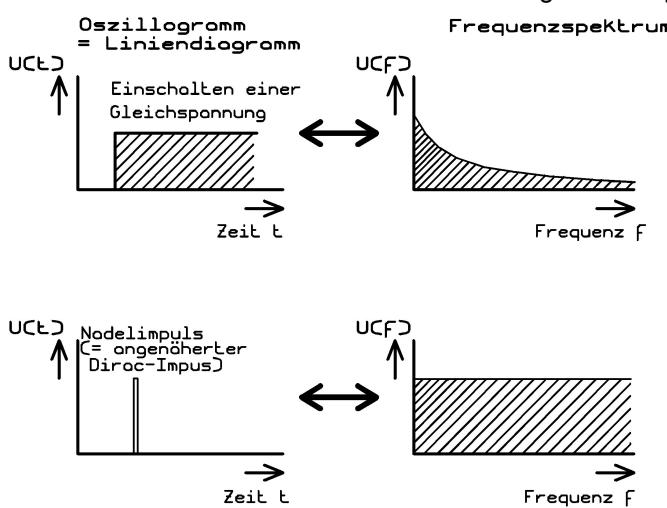


Nur eine rein sinusförmige Spannung (hier:  $f = 1\text{ kHz}$ ), die vor sehr langer Zeit eingeschaltet wurde und die in absehbarer Zeit nicht aufhört (...also weiterläuft bis zu den Flügen von Raumschiff Enterprise im Jahr 2150....) besteht nur aus einer einzigen Frequenz.

Da diese Formulierung so gar nicht zu dem passt, was man kennt und weiß und täglich sieht, folgt hier die Lösung des Rätsels: Man muss nämlich sorgfältig zwischen „Schaltvorgängen“ und „Verzerrungen der Kurvenform bei periodischen Signalen“ unterscheiden.

### Schaltvorgänge

Jede einmalige Änderung (= Einschalten, Ausschalten, Aufdrehen, Kleiner machen, kurz Unterbrechen.....) erzeugt ein einmaliges „Störsignal“ oder „Störspektrum“, das vom Entstehungsort wegwandert. Das kennt jeder von uns als Knacken im Radio, wenn er plötzlich das Licht im Raum einschaltet....man hat das bloß noch nie so gesehen oder beachtet! Entscheidend in diesem Störsignal ist die Tatsache, dass **der komplette Frequenzbereich einschließlich der sehr hohen Frequenzen während dieser kurzen Zeit lückenlos mit Signalen belegt ist**. Die tiefen Frequenzanteile breiten sich dann natürlich über Kabelverbindungen aus, die hohen Anteile werden dagegen schon von den als Antennen wirkenden Verbindungsdrähten der Schaltung als elektromagnetische Wellen abgestrahlt. Und das ist der erwähnte Knacks im Radio, der dann selbst in einem batteriebetriebenen Kofferradio zu hören ist! Glücklicherweise sinken die Amplituden der hohen Frequenzanteile bei den üblichen Schaltvorgängen sehr schnell ab, sonst könnten wir überhaupt nicht drahtlos kommunizieren. Die Geschwindigkeit der Änderung beim „Schaltvorgang“ bestimmt wesentlich diese Amplitudenverteilung und wenn sich etwas sehr langsam ändert, können wir diese Effekte fast gar nicht nachweisen. Aber es gibt ein Signal, in dem alle Frequenzen enthalten sind und vor dem sollte man sich auch in abgeschwächter Form hüten: es ist der „Dirac-Impuls“ mit unendlich kurzer Pulsdauer und unendlich großer Amplitude, denn er kann geradezu sagenhaft stören.



Hier zwei Beispiele:

Links die Oszillosgramme („Liniendiagramme“) vom Einschalten einer Gleichspannung und vom Nadelimpuls, der den Dirac-Impuls annähern soll.

Rechts die zugehörigen Frequenzspektren, wobei für den Nadelimpuls eine sehr kleine Pulsdauer angenommen wurde. (Genauere Details folgen im Sampling-Kapitel).

Man erkennt gut, dass es kein Entkommen vor diesen Störfrequenzen gibt, denn es existieren bei beiden Signalen **keine Lücken im Spektrum!**

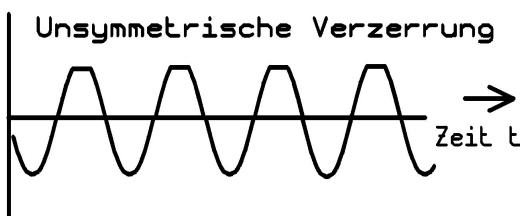
## Verzerrungen bei periodischen Signalen

Da merken wir uns gleich den Schlüsselsatz:

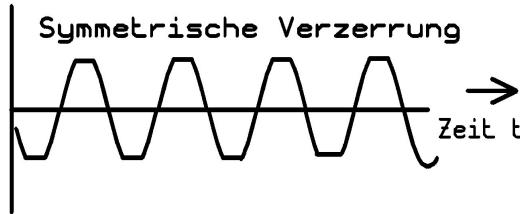
**Auch die allerkleinste, aber sich regelmäßig wiederholende Abweichung von der idealen Sinusform führt zum zusätzlichen Auftreten neuer Signale im Frequenzspektrum!**

Diese neuen Frequenzen tragen den Fachausruck „Harmonische“ oder „Oberwellen“ und sind stets **ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz** (Im Klartext heißt das: man findet nun plötzlich auch die doppelte, dreifache, vierfache, fünffache, sechsfache....Frequenz im Spektrum!).

Dabei gilt noch eine weitere wichtige Spielregel:



Ist nur eine Halbwelle von der Verzerrung betroffen  
ODER die positive und die negative Halbwelle sind  
unterschiedlich verformt, dann spricht man von  
**unsymmetrischer Verzerrung**. Man findet dann **alle Oberwellen** im Spektrum.



Ist das ursprünglich ideale Sinussignal aber  
**symmetrisch** verzerrt (= positive und negative Halbwelle  
sind exakt in derselben Weise verändert), dann gibt es  
**keine geraden**, sondern nur **ungerade Oberwellen** (=  
außer der Grundfrequenz beobachtet man zusätzlich **nur die dreifache, die fünffache, die siebenfache, die neunfache.....Grundfrequenz**).

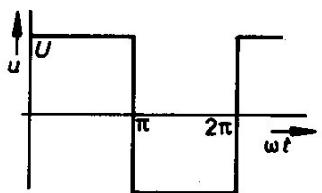
Abschließender Hinweis:

Sobald man am idealen Sinus irgendwas im **Rhythmus eines anderen Signals verändert** (= Amplitude, Phase oder Frequenz), gelangt man zu den entsprechenden **Modulationsarten**.

**Auch hier müssen folglich neue Signale entstehen.** Aber damit sind wir bei einem anderen Thema...

Auf dem nächsten Blatt folgt noch eine kleine Zusammenstellung einiger Signalformen und der zugehörigen Spektren:

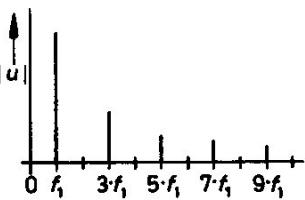
### Rechteckspannung



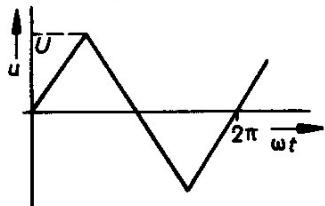
$$f(t) = \frac{4 \cdot U}{\pi} (\sin \omega t + \dots)$$

$$\dots + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots)$$

**Spektrum: Absolutwerte der auftretenden Frequenzen**

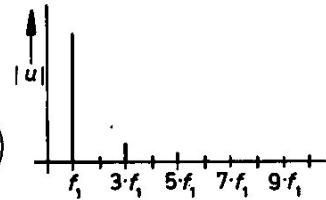


### Dreieckspannung

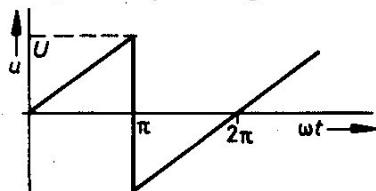


$$f(t) = \frac{8 U}{\pi^2} (\sin \omega t - \dots)$$

$$\dots + \frac{1}{3^2} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5 \omega t - \dots)$$

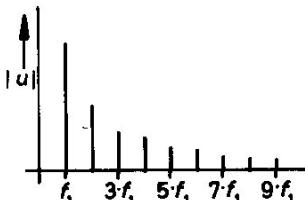


### Sägezahnspannung

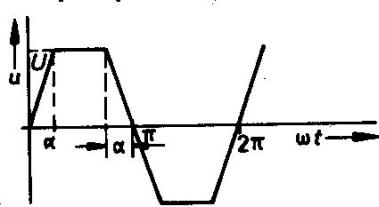


$$f(t) = \frac{2 U}{\pi} (\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2 \omega t + \dots)$$

$$\dots + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t - \dots + \dots)$$



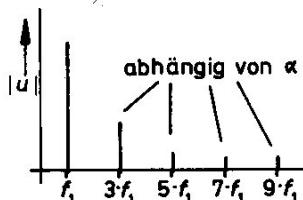
### Trapezspannung



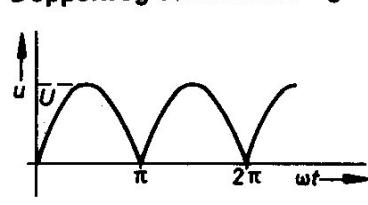
$$f(t) = \frac{4 \cdot U}{\pi \cdot \alpha} (\sin \alpha \cdot \sin \omega t + \dots)$$

$$\dots + \frac{\sin 3 \alpha}{3^2} \cdot \sin 3 \omega t + \dots$$

$$\dots + \frac{\sin 5 \alpha}{5^2} \cdot \sin 5 \omega t + \dots)$$



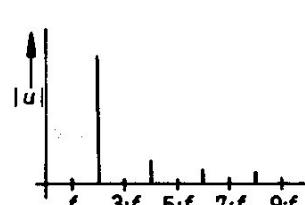
### Doppelweg-Gleichrichtung



$$f(t) = \frac{4 U}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2 \omega t - \dots \right)$$

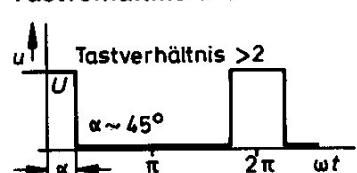
$$\dots - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4 \omega t - \dots$$

$$\dots - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6 \omega t - \dots \right)$$



### Rechteckspannung

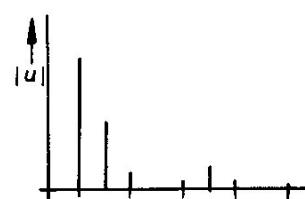
Tastverhältnis > 2



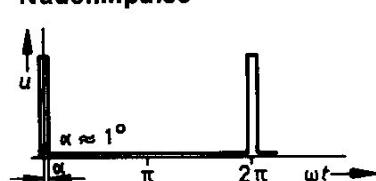
$$f(t) = \frac{2 U}{\pi} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{1} \cos \omega t + \dots \right)$$

$$\dots + \frac{\sin 2 \alpha}{2} \cos 2 \omega t + \dots$$

$$\dots + \frac{\sin 3 \alpha}{3} \cos 3 \omega t + \dots \right)$$



### Nadelimpulse



## 2. Simulation des Spektrums eines einmaligen Pulses

Wir wollen mal prüfen, ob die Behauptung aus dem vorigen Kapitel stimmt. Dazu verwenden wir ein Puls-Signal mit folgenden Daten:

**Umin = 0V / Umax = 1000 V / Anstiegs- und Abfallzeit je 1 Mikrosekunde / Pulsdauer = 1 Millisekunde.**

Zusätzlich bauen wir eine „**Delay Time“ nach dem Start von 2 Millisekunden ein** und simulieren bis 50 Millisekunden im Zeitbereich die Spannung am Lastwiderstand. Für eine gute Auflösung bei der FFT sehen wir 262144 Samples vor.

Den Signalverlauf bilden wir mit einer „**PWL**“-Quelle (= piece wise linear) nach, der folgende Wertepaare zur Verfügung gestellt werden:

bei t = Null	U = 0
bei t = 2 Millisekunden	U = 0
bei t = 2,001 Millisekunden	U = 1000 V
bei t = 3,001 Millisekunden	U = 1000 V
bei t = 3,002 Millisekunden	U = 0
bei t = 50 Millisekunden	U = 0

Diese Möglichkeit, sich einen bestimmten Spannungsverlauf durch eine Datei mit vielen Wertepaaren (= Zeitpunkt + Amplitude bei einem bestimmten Zeitpunkt) zu erzeugen, gibt es in allen Simulationsprogrammen und das ist eine überaus praktische Sache. Dabei werden bei der Simulation die einzelnen „Samples“ durch gerade Linien miteinander verbunden und der gewünschte Verlauf angenähert.

Allerdings muss man beim qucsstudio auf einige Feinheiten achten:

- Der Aufruf dieser Quelle erfolgt über „Komponenten / Quellen“. Aber die **PWL-Quelle sucht man vergeblich**, denn hier heißt sie „**dateibasierte Spannungsquelle**“.
- Der Spannungsverlauf muss in einer **selbst geschriebenen „\*.csv“-Datei** als eine Folge von Wertpaaren angegeben werden. **Die Datei selbst wird dann in das betroffene Projekt hineinkopiert.** (Übrigens: „csv“ ist die Abkürzung für „comma separated values“...)

Fangen wir mit der Datei „pulse.csv“ an.

Begonnen wird beim Nullpunkt mit Null Volt. Bei t = 2 Millisekunde haben wir immer noch Null Volt, aber eine Mikrosekunde später sind es bereits 1000 Volt. Erst ab 3,002 Mikrosekunden sind wir wieder bei Null Volt und das bleibt so bis zum Ende der Simulationszeit von 50 ms.

**Vorsicht:**

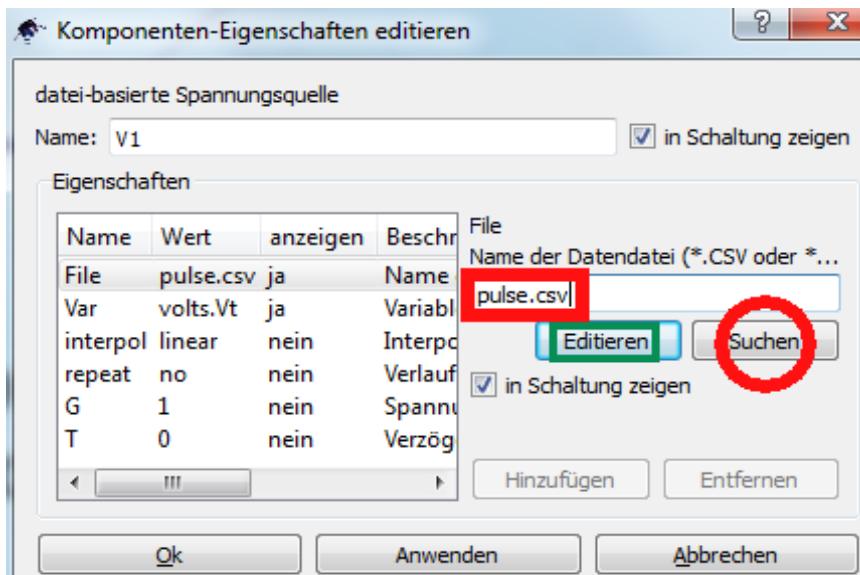
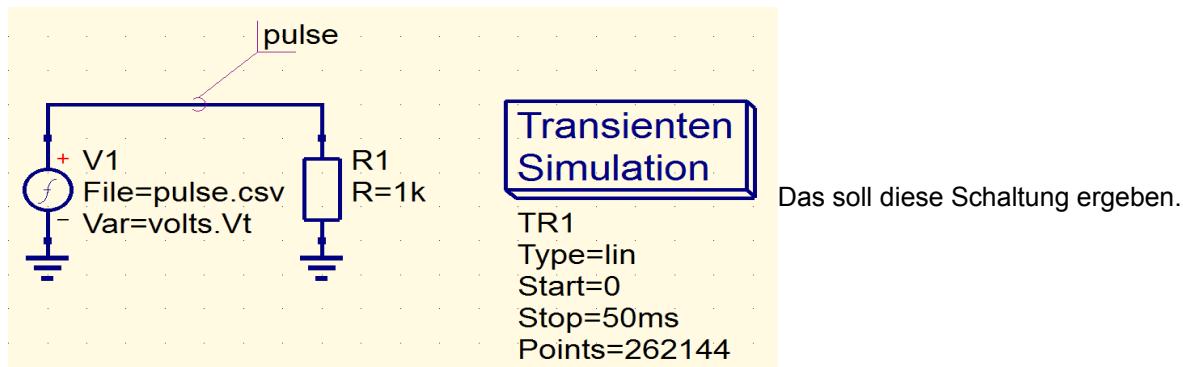
**Jedes Wertpärchen (= erst die Zeit, dann die Spannung) kommt in eine eigene Zeile, die jeweils mit der Eingabe-Aufforderung (= Return-Taste) abgeschlossen werden muss.**

So sieht dann der Datei-Inhalt von „pulse.csv“ aus:

```
0      0
2e-3    0
2.001e-3 1e3
3.001e-3 1e3
3.002e-3 0
50e-3    0
```

Geschrieben wird das mit einem Texteditor und man darf nicht vergessen, vor dem Abspeichern als „pulse.csv“ auf „Alle Dateien / ANSI“ umzuschalten. **Speicherort ist natürlich das Projekt, in dem sich auch die zugehörige Schaltung befindet.**

Zum korrekten Einbinden der Wertedatei wird mit der rechten Maustaste auf das Symbol der **Quelle** geklickt und dann über „Eigenschaften editieren“ ihr Property-Menü geöffnet.



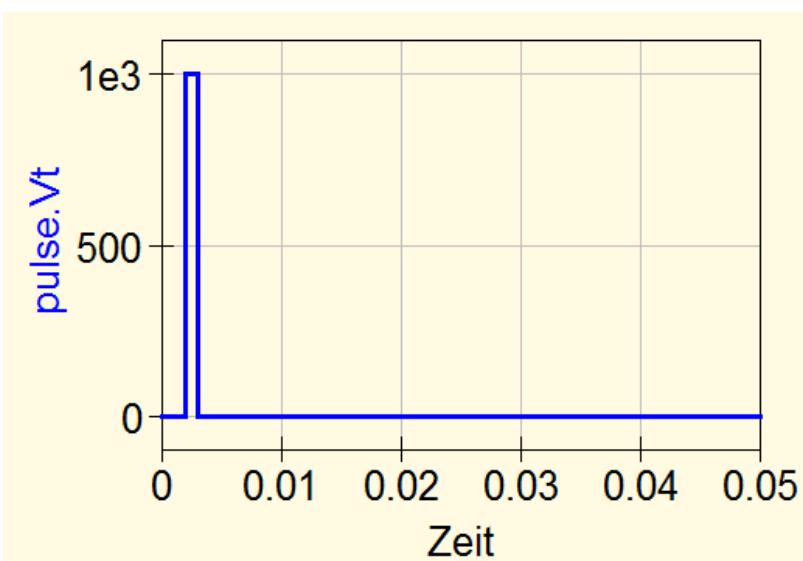
Die „**dateibasierte Spannungsquelle**“ gibt es natürlich unter „Komponenten / Quellen“. Nachdem man ihre Eigenschaften editiert hat, muss man über „**Suchen**“ den Pfad zur gespeicherten „pulse.csv“-Datei einstellen. Ihre Bezeichnung muss anschließend im **rot markierten Feld** auftauchen.

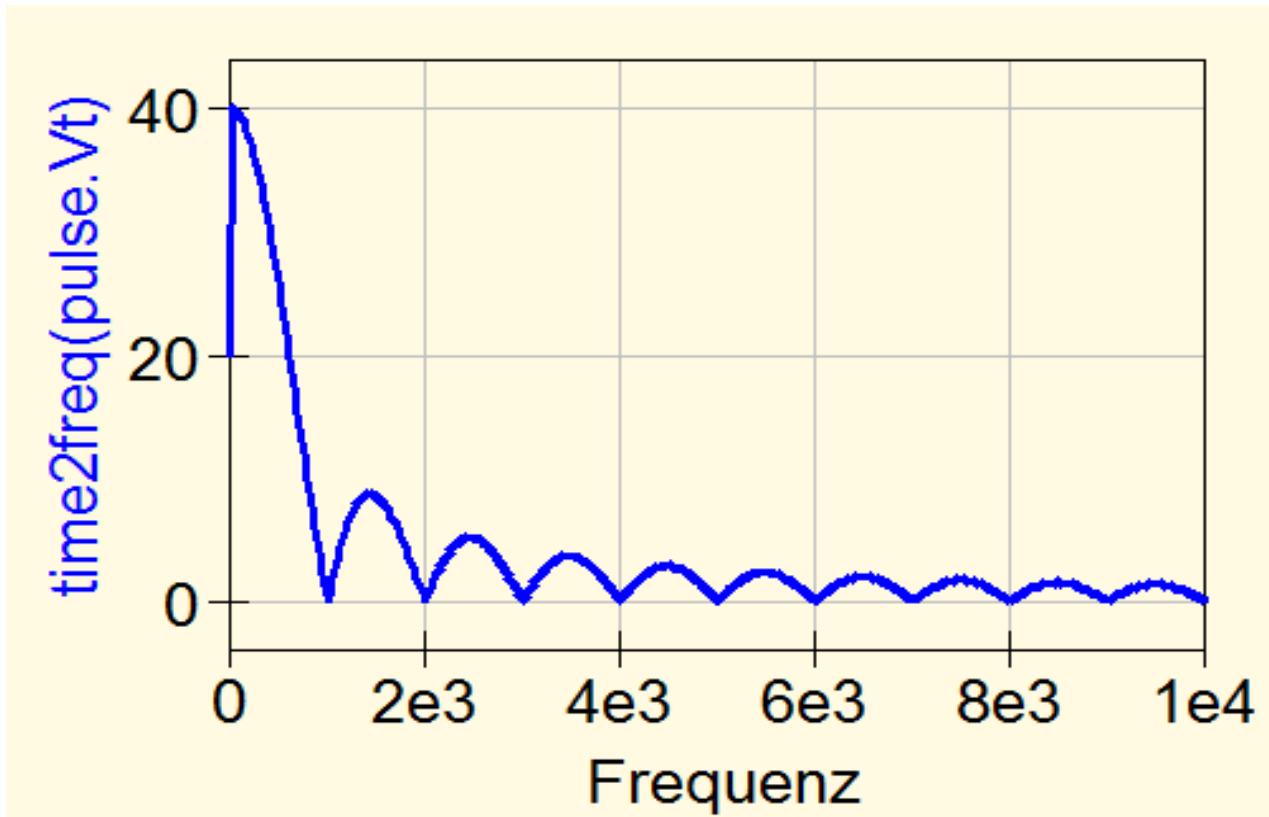
**Falls etwas zu ändern ist, kann sie jederzeit über „Editieren“ geöffnet und korrigiert werden.**

Anschließend reicht „Anwenden“ und OK, damit die Simulation gestartet werden kann.

Nach der Simulation benötigen wir ein kartesisches Diagramm und füllen dessen „Eigenschaften-Menü“ folgendermaßen aus:

- pulse.vt** wird aktiviert und erscheint im Graphen-Fenster.
- Die Liniendicke wird auf „2“ gestellt, die Farbe ist automatisch erst mal „blau“.
- Auf der Karteikarte „Eigenschaften“ wird für die X-Achse die Bezeichnung „Zeit“ angegeben.
- Und mit „Anwenden“ und OK sollte sich folgendes Diagramm einstellen.





Um dieses Bild zu erhalten, holen wir erst ein kartesisches Diagramm, rufen seine Eigenschaften auf [und](#) geben oben im Fenster “**time2freq(pulse.Vt)**” ein.

Mit “**neuer Graph**” wird diese Eingabe übernommen und wir sorgen gleich für eine **Linienbreite “2”**.

Auf der Karteikarte “**Eigenschaften**” wird die Bezeichnung “**Frequenz**” für die waagrechte Achse vorgesehen.

Unter “**Grenzen**” sorgen wir für eine **Frequenzanzeige von 0....10 kHz**. Dann wird “Anwenden” und OK angeklickt.

Sehr schön ist nun der “**sinx/x**” - Verlauf der Energieverteilung zu sehen. Es handelt sich ja um ein lückenloses Spektrum und damit wird im Prinzip die “**Leistungsdichte pro Hertz Bandbreite**” dargestellt.

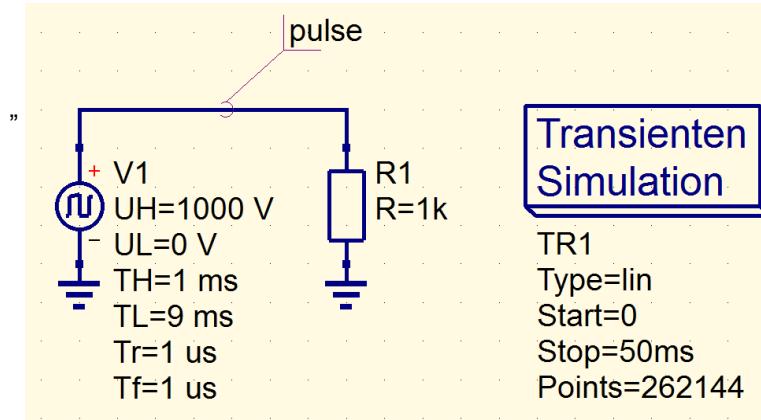
Übrigens:

Die Theorie behauptet, dass bei **allen Vielfachen** von

**f = 1 / Pulslänge**

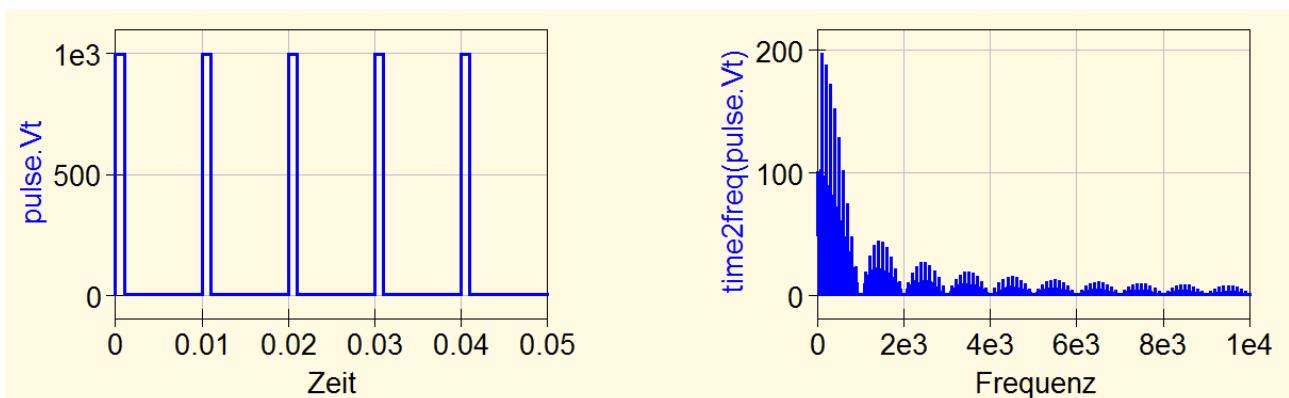
Nullstellen im Frequenzspektrum auftreten müssen. Bitte prüfen Sie das nach.

### 3. Simulation des Frequenzspektrums bei einem periodischen Pulssignal

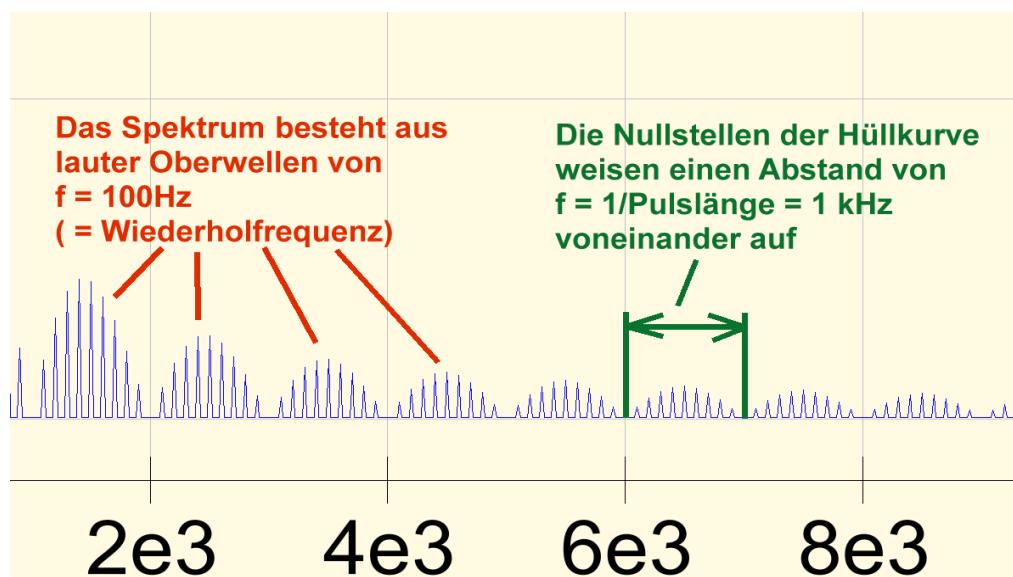


Wir benützen denselben Spannungsverlauf wie vorher, wiederholen ihn aber **100x in der Sekunde**. Deshalb müssen wir die **Dateibasierte Spannungsquelle** durch eine **Rechteck-Spannungsquelle** ersetzen.  
Die Simulationszeit beträgt weiterhin 50ms, damit wir auf eine Frequenzauflösung von  $1 / 50\text{ms} = 20\text{Hz}$  kommen.

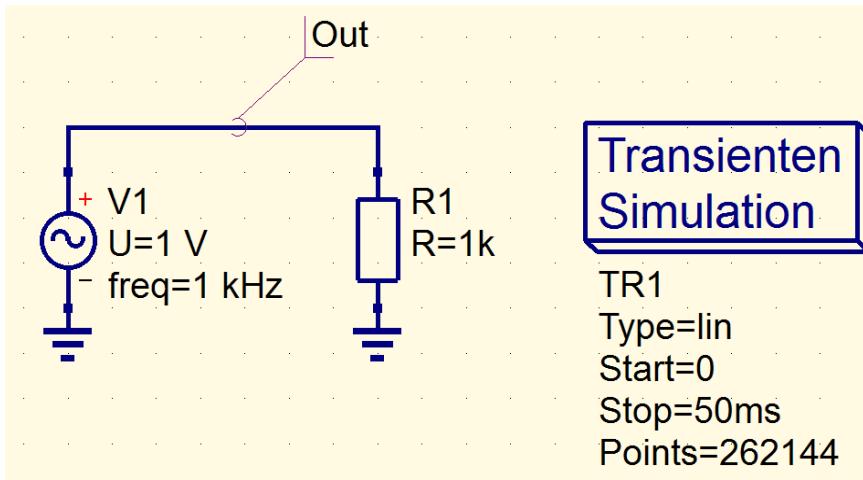
Damit erhalten wir folgenden Spannungverlauf und das zugehörige Frequenzspektrum:



Die Hüllkurve entspricht dem Verlauf im vorigen Beispiel (= nur ein einziger Puls), aber durch die Wiederholung mit  $f = 100 \text{ Hz}$  verändert sich das lückenlose Spektrum des Einzelpulses zu einem Linienspektrum nur mit Harmonischen dieser Grundfrequenz  $f = 100 \text{ Hz}$ . Ein Zoom des Diagramms zeigt das sehr schön.



## 4. Der ideale Sinus

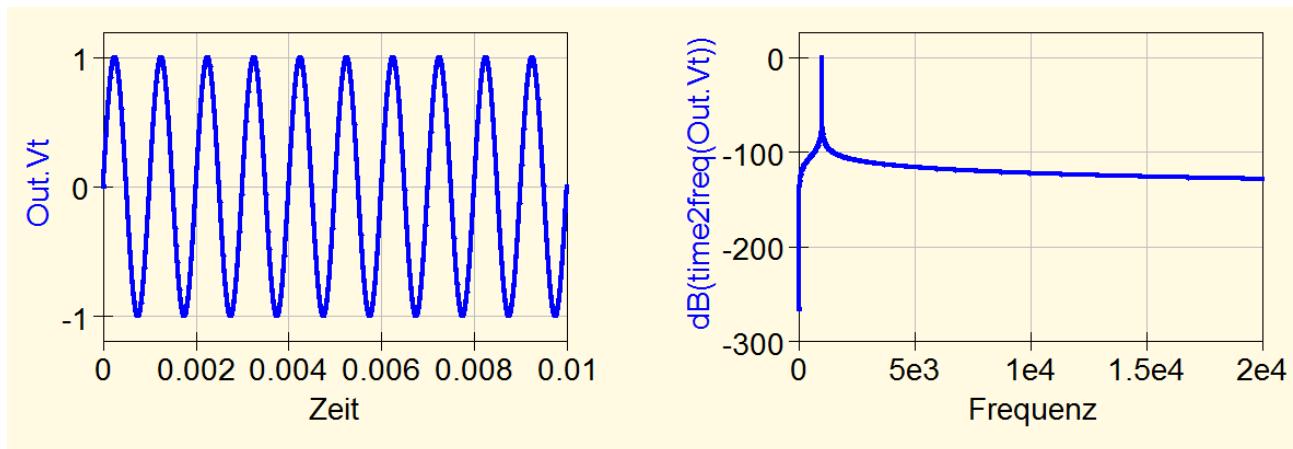


Sehen wir uns mal an, ob sich die Behauptung aus dem Grundlagenteil:

„Nur ein Sinussignal, bei dem weder Anfang noch Ende zu erkennen sind, enthält nur eine einzige Spektrallinie!“

beweisen lässt.  
Simulieren wir deshalb eine 1kHz-Sinusspannung (Spitzenwert = 1V) für 50ms mit 262144 Samples.

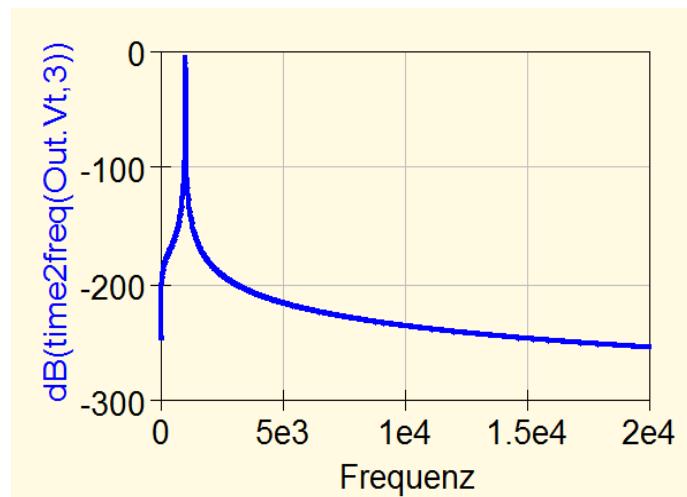
Das kommt dabei heraus:



Wer enttäuscht ist, dass es da ab -100 dB im Spektrum plötzlich nicht mehr richtig nach unten weiter geht, der bedenke:

Wir kämpfen mal wieder mit dem Problem des „**Einschalt- und Ausschaltvorganges**“ und müssen deshalb ein „**Window**“ (**Hanning = Index 3**) über den zeitlichen Verlauf im linken Bild legen.  
Dann erhalten wir das folgende Spektrum mit der Formel:

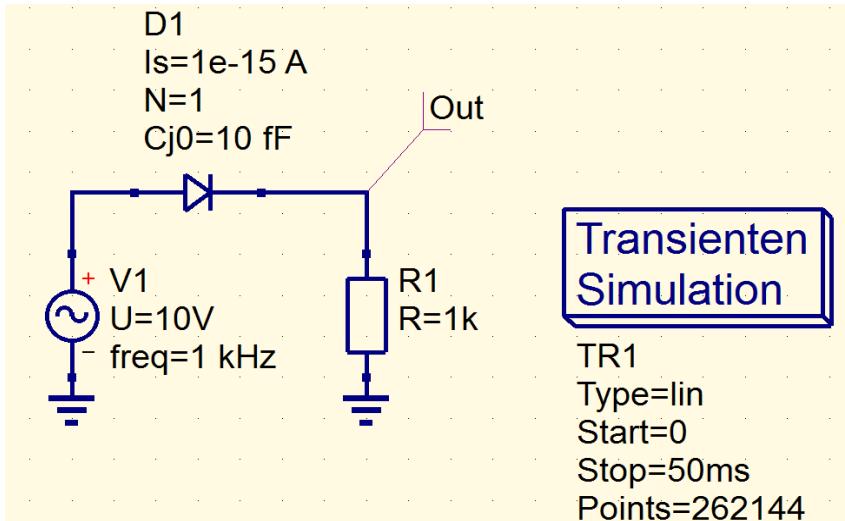
**dB(time2freq(Out.Vt,3))**



Na, das sieht gleich ganz anders und recht vernünftig aus.

Das ist nun wirklich ein nahezu perfekter Sinus...

## 5. Der unsymmetrisch verzerrte Sinus



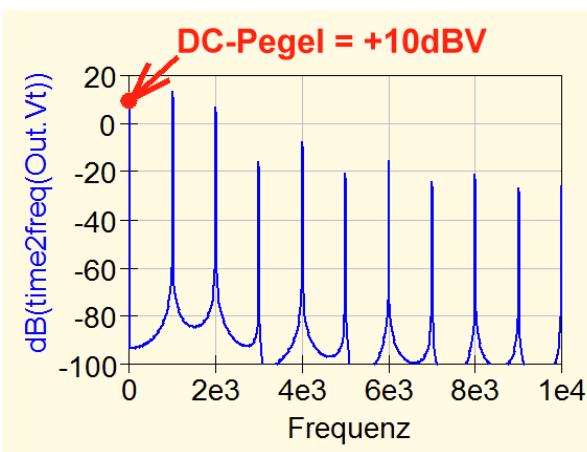
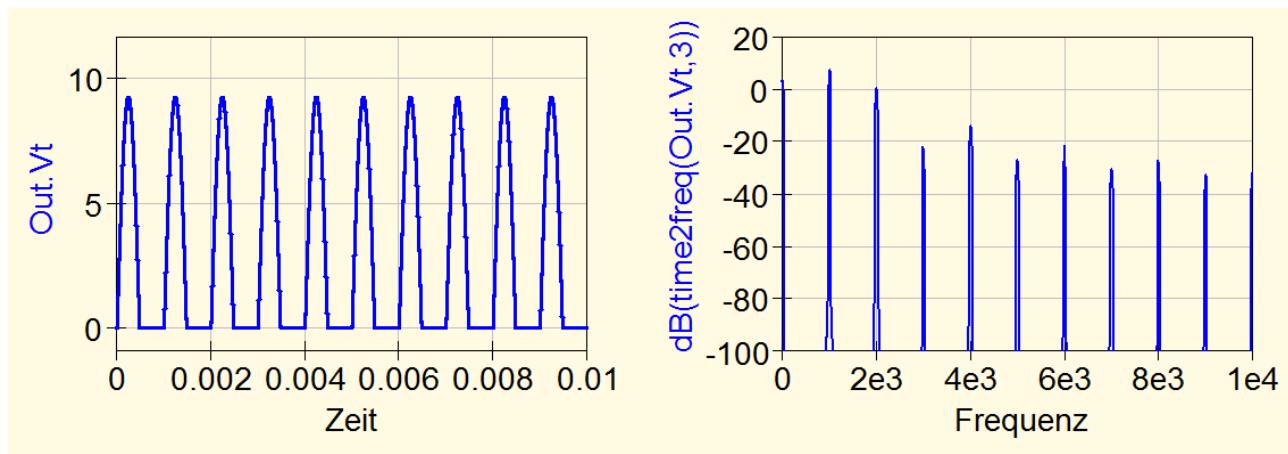
Da schneiden wir einfach durch eine Diode zwischen Quelle und Lastwiderstand die negative Halbwelle ab. Das ist die extremste Möglichkeit, eine Halbwelle zu verzerrern..

Der Spitzenwert der sinusförmigen Eingangsspannung beträgt 10 V erhöht, die Frequenz  $f = 1 \text{ kHz}$ .

Simuliert wird bis  $t = 50 \text{ ms}$  mit 262144 Punkten.

Im linken Bild mit  $t_{\max} = 10 \text{ ms}$  sehen wir sehr schön den zeitlichen Verlauf am Ausgang. Der Wert der positiven Halbwelle ist nun – wie es sich gehört! – genau um die Schwellspannung der leitenden Diode mit 0,7 Volt kleiner als beim Eingangssignal.

Das rechte Bild ist das Ergebnis der FFT mit einem **Hanning-Fenster (Index = 3)** und reicht bis zu  $f = 10 \text{ kHz}$ .



Lässt man das Hanning-Window (Index = 3) bei der FFT weg, dann erhält man dieses Ergebnis.

Im Vergleich zum obigen rechten Bild haben wir nun natürlich das „Auffüllen des Spektrums mit Energie durch den Einschalt- und Ausschaltvorgang“.

Aber:

Erst durch den Wegfall der „Fensterung“ mit ihrer Abschwächung der Werte im Start- und Schlussbereich wird jetzt plötzlich der **DC-Anteil korrekt dargestellt**.

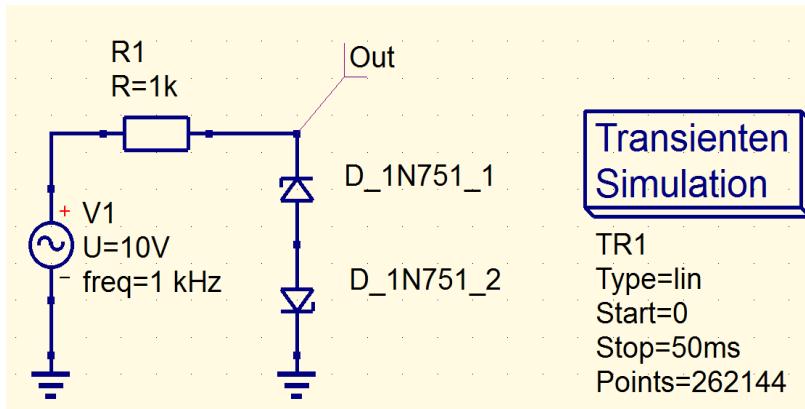
+10 dBV entsprechen nämlich etwa 3 Volt und die Theorie behauptet, dass der DC-Anteil in einem solchen „gleichgerichteten Signal“ den Wert

**Udc = Umax /  $\pi$**

hat.

Und  $U_{\max} = 9,3 \text{ Volt}$  geteilt durch  $\pi$  gibt etwa 3 Volt. Bitte vergleichen!

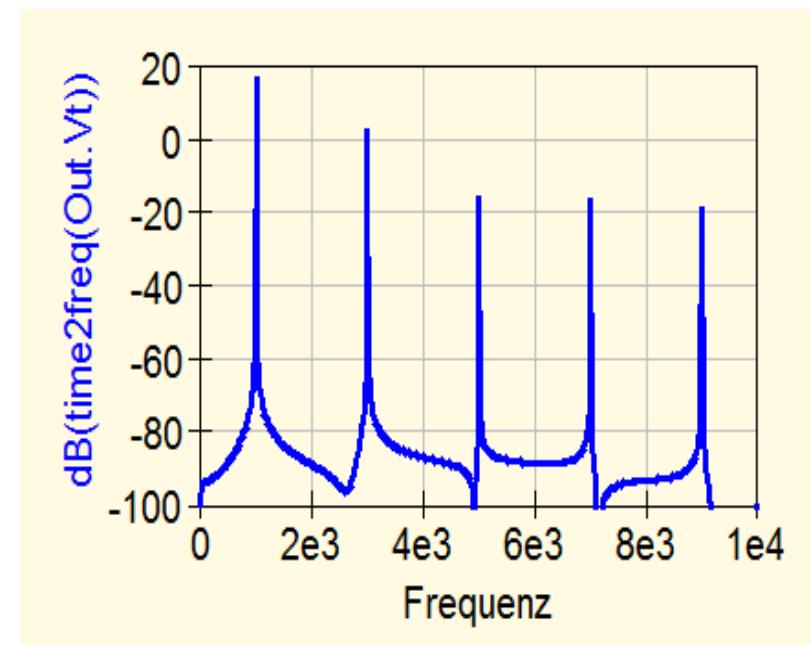
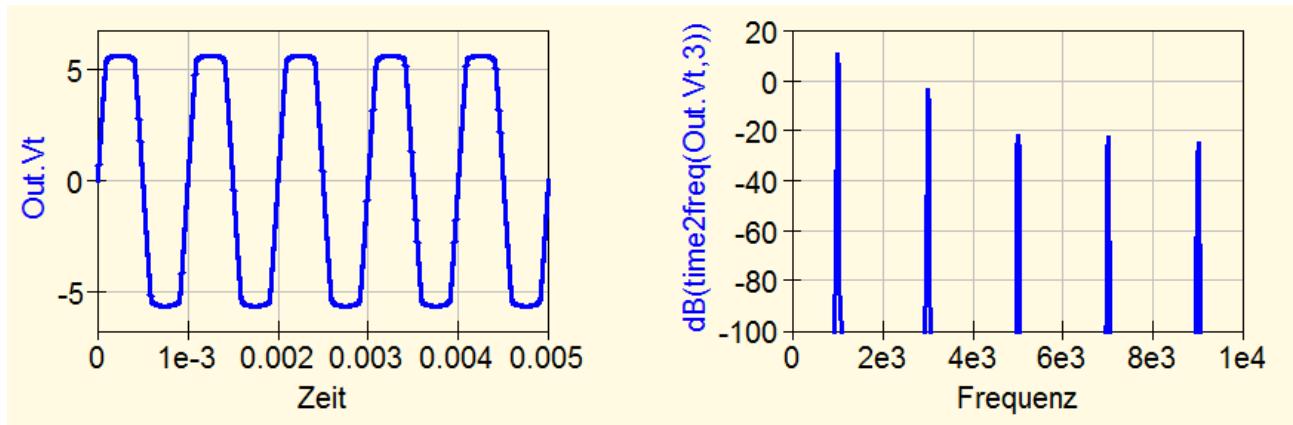
## 6. Der symmetrisch verzerrte Sinus



Eine sehr einfache Übung: wir schalten zwei gleiche Z-Dioden gegensinnig in Reihe und verwenden denselben Diodentyp „1N751“. Sie weisen eine Durchbruchsspannung von 5,1 V auf und wir finden sie in der untersten Karteikarte „Bibliotheken“ unter „Z-Diodes“ (= linker Rand der Zeichenfläche).

Wieder wird ein Sinus mit  $f = 1\text{kHz}$  /  $U_{peak} = 10\text{V}$  angelegt und bis 50ms mit 262144 Punkten simuliert.

Auch beim Spektrum gilt dieselbe Kalibrierung wie im vorigen Beispiel und man erkennt sehr schön, dass diesmal (wegen der Symmetrie des Signals) nur **ungeradzahlige Harmonische** auftreten.



Verzichtet man bei der FFT wieder auf die „Hanning-Fensterung“, so hat man zwar erneut den Einschalt- und Ausschaltvorgang am Hals. Aber dafür stimmt die Amplitudenkalibrierung.